2025

CANPOINT

北京专版

全品高考

第二轮专题

主编：肖德好

数学 新高考

作业手册

???

The Second Quantity Study Project

延边教育出版社

目录 CONTENTS

基础过关

1. [2024·朝阳二模] 下列函数中,既是奇函数又在其定义域上单调递增的是 ( )

A. $f(x)=\sin x$ B. $f(x)=\cos x$

C. $f(x)=\sqrt{x}$ D. $f(x)=x^3$

2. 函数 $f(x)=x^2$ 是 ( )

A. 偶函数,且没有极值点

B. 偶函数,且有一个极值点

C. 奇函数,且没有极值点

D. 奇函数,且有一个极值点

3. [2024·昌平二模] 若 $0<a<b<1,c>1$,则 ( )

A. $c^b<c^a$ B. $\log_c a>\log_c b$

C. $\sin\frac{c}{a}>\sin\frac{c}{b}$ D. $a^c<b^c$

4. 已知函数 $f(x)$满足 $f(-x)-f(x)=0$,且在$[0,+\infty)$上单调递减,对于实数 a,b,则“$a^2<b^2$”是“$f(a)>f(b)$”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. [2024·西城一模] 德国心理学家艾宾浩斯研究发现,人类大脑对事物的遗忘是有规律的,他依据实验数据绘制出“遗忘曲线”.“遗忘曲线”中记忆率 y 随时间 t(小时)变化的趋势可由函数 $y=1-0.6t^{0.27}$ 近似描述,则记忆率为 50%时经过的时间约为(参考数据:lg 2≈0.30,lg 3≈0.48) ( )

A. 2 小时 B. 0.8 小时

C. 0.5 小时 D. 0.2 小时

6. [2024·朝阳二模] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1,x\leqslant 1,\\2^x-a,x>1\end{cases}$存在最小值,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,1]$ B. $(-\infty,1)$

C. $[1,+\infty)$ D. $(1,+\infty)$

7. 自“ChatGPT”横空出世,全球科技企业掀起一场研发 AI 大模型的热潮,随着 AI 算力等硬件底座逐步搭建完善,AI 大规模应用成为可能,尤其在图文创意、虚拟数字人以及工业软件领域已出现较为成熟的落地应用. Sigmoid 函数和 Tanh 函数是研究人工智能被广泛使用的两种用作神经网络的激活函数. Tanh 函数的解析式为 $\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,经过某次测试得知 $\tanh x_0=\frac{3}{5}$,则当把变量减半时,$\tanh\frac{x_0}{2}=$( )

A. $\frac{1}{3}$ B. 3

C. 1 D. $\frac{1}{3}$或 3

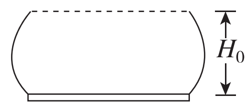
8. [2024·通州一模] 函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}+\lg(x-2)$的定义域为________.

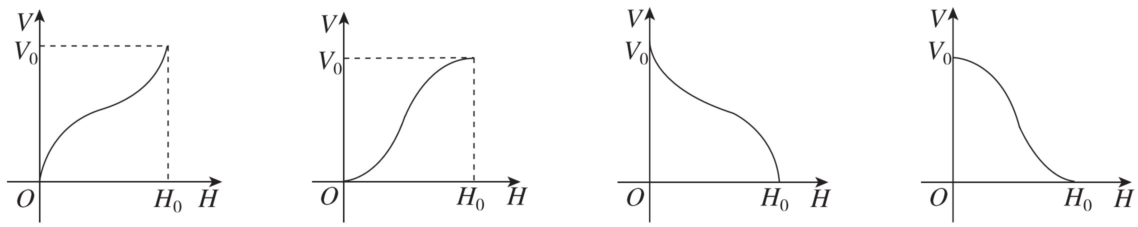
9. [2024·延庆一模] 已知函数 $f(x)=x^{\alpha}(0<\alpha<1)$在区间$(-1,0)$上单调递减,则 α 的一个取值为________.

10. ［2024·东城二模］设函数 $f(x)=\begin{cases}1,|x|<1,\\ x^2,|x|\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=$________，不等式 $f(x)<f(2x)$ 的解集是____________.

能力提升

11. ［2023·房山二模］一个高为 H_0，满缸水量为 V_0 的鱼缸的轴截面如图所示，其底部破了一个小洞，满缸水从洞中流出.若鱼缸水深为 H 时，鱼缸里水的体积为 V，则函数 $V=f(H)$ 的大致图象是　（　）





A　　B　　C　　D

12. ［2024·海淀二模］设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对于函数 $f(x)$ 图象上一点 (x_0,y_0)，若集合 $\{k\in\mathbf{R}|k(x-x_0)+y_0\leqslant f(x),\forall x\in D\}$ 只有 1 个元素，则称函数 $f(x)$ 具有性质 P_{x_0}.下列函数中具有性质 P_1 的是　（　）

A. $f(x)=|x-1|$　　B. $f(x)=\lg x$

C. $f(x)=x^3$　　D. $f(x)=-\sin\frac{\pi}{2}x$

13. ［2024·丰台一模］已知函数 $f(x)$ 具有下列性质：

①当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 时，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$；

②在区间 $(0,+\infty)$ 上，$f(x)$ 单调递增；

③$f(x)$ 是偶函数.

则 $f(0)=$________；函数 $f(x)$ 的一个解析式可能为__________.

14. ［2024·丰台一模］目前发射人造天体，多采用多级火箭作为运载工具，其做法是在前一级火箭燃料燃烧完后，连同其壳体一起抛掉，让后一级火箭开始工作，使火箭系统加速到一定的速度时将人造天体送入预定轨道.现有材料科技条件下，对于一个 n 级火箭，在第 n 级火箭的燃料耗尽时，火箭的速度可以近似表示为 $v=3\ln\frac{10^n a_1a_2\cdots a_n}{(9+a_1)(9+a_2)\cdots(9+a_n)}$，其中 $a_i=\frac{m_p+\sum\limits_{j=i}^{n}m_j}{m_p+\sum\limits_{j=i}^{n}m_j-m_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

注：m_p 表示人造天体质量，m_j 表示第 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 级火箭结构和燃料的总质量.

给出下列三个结论：

①$a_1a_2\cdots a_n<1$；

②当 $n=1$ 时，$v<3\ln 10$；

③当 $n=2$ 时，若 $v=12\ln 2$，则 $\sqrt{a_1a_2}\geqslant 6$.

其中所有正确结论的序号是________.

基础过关

1. ［2024·全国甲卷］已知函数 $f(x)=a(x-1)-\ln x+1$.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $a\leqslant 2$,证明:当 $x>1$ 时,$f(x)<e^{x-1}$ 恒成立.

2. ［2024·东城一模］已知函数 $f(x)=x\ln(x-1)$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在 $x=2$ 处的切线方程；

(2)设 $g(x)=f'(x)$,求函数 $g(x)$的最小值；

(3)若$\dfrac{f(x)}{x-a}>2$,求实数 a 的值.

能力提升

3. 已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-ax(a\in\mathbf{R})$，若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $y=x+2$ 平行.

(1)求 a 的值；

(2)证明：函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内有唯一极值点.

4. [2024·海淀一模] 已知函数 $f(x)=x\cdot e^{a-\frac{1}{2}x}$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若函数 $g(x)=|f(x)+e^{-2}a|$，$x\in(0,+\infty)$ 存在最大值，求 a 的取值范围.

基础过关

1. [2023·西城二模] 已知函数 $f(x)=\lg|x|$，则 $f(x)$ ( )

A. 是奇函数，且在$(0,+\infty)$上单调递增

B. 是奇函数，且在$(0,+\infty)$上单调递减

C. 是偶函数，且在$(0,+\infty)$上单调递增

D. 是偶函数，且在$(0,+\infty)$上单调递减

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x,|x|\leqslant 1,\\ \sin\dfrac{\pi}{2}x,|x|>1,\end{cases}$ 则下列结论正确的是 ( )

A. $\exists x\in\mathbf{R},f(-x)\neq -f(x)$

B. $\forall x\in\mathbf{R},f(-x)\neq f(x)$

C. 函数 $f(x)$在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增

D. 函数 $f(x)$的值域是$[-1,1]$

3. 若定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是 ( )

A. $[-1,1]\cup[3,+\infty)$　　B. $[-3,-1]\cup[0,1]$

C. $[-1,0]\cup[1,+\infty)$　　D. $[-1,0]\cup[1,3]$

4. [2024·东城二模] 已知函数 $f(x)=|x-1|e^x$ 的图象与直线 $y=1$ 交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点，则$|x_1-x_2|$所在的区间为 ( )

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$

C. $(2,3)$　　D. $(3,4)$

5. [2024·昌平二模] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x,x\leqslant 1,\\ \ln(x-1),x>1.\end{cases}$ 若对任意的 x，都有$|f(x)|\geqslant ax$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,0]$　　B. $[-4,0]$

C. $[-3,0]$　　D. $(-\infty,2]$

6. [2023·海淀一模] 设函数 $f(x)=\begin{cases}(x-a+1)(x+1),x<1,\\ \lg x-a,x\geqslant 1.\end{cases}$

①当 $a=0$ 时，$f[f(1)]=$________；

②若 $f(x)$恰有 2 个零点，则 a 的取值范围是________.

7. [2023·西城一模] 设 $c\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x-c,x\geqslant 0,\\ 2^x-2c,x<0.\end{cases}$ 若 $f(x)$恰有一个零点，则 c 的取值范围是________.

8. ［2024·延庆一模］已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2ax, x<1,\\ \dfrac{a\ln x}{x}, x\geqslant 1.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

①存在实数 a，使得函数 $f(x)$ 的最小值为 0；

②存在实数 $a<0$，使得函数 $f(x)$ 的最小值为 -1；

③存在实数 a，使得函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点；

④存在实数 a，使得函数 $f(x)$ 恰有 4 个零点.

其中所有正确结论的序号是________.

能力提升

9. ［2024·丰台二模］设函数 $f(x)=\begin{cases}|x+m|, x<0,\\ -\dfrac{\sqrt{2}m}{2}\sqrt{x}, x\geqslant 0.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

①当 $m=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减；

②若函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点，则 $m>0$；

③当 $m<0$ 时，若存在实数 a,b，使得 $f(a)=f(b)$，则 $|a-b|$ 的取值范围为 $(2,+\infty)$；

④已知点 $P(-m,0)$，函数 $f(x)$ 的图象上存在两点 $Q_1(x_1,y_1)$，$Q_2(x_2,y_2)$ $(x_1<x_2<0)$，Q_1，Q_2 关于坐标原点 O 的对称点也在函数 $f(x)$ 的图象上，若 $|PQ_1|+|PQ_2|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，则 $m=1$.

其中所有正确结论的序号是________.

10. 华人数学家李天岩和美国数学家约克给出了“混沌”的数学定义，由此发展的混沌理论在生物学、经济学和社会学领域都有着重要的作用. 在混沌理论中，函数的周期点是一个关键概念，定义如下：设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，对于 $x_0\in\mathbf{R}$，令 $x_n=f(x_{n-1})$ $(n=1,2,3,\cdots)$，若存在正整数 k 使得 $x_k=x_0$，且当 $0<j<k$ 时，$x_j\neq x_0$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个周期为 k 的周期点. 给出下列四个结论：

①若 $f(x)=e^{x-1}$，则 $f(x)$ 存在唯一一个周期为 1 的周期点；

②若 $f(x)=2(1-x)$，则 $f(x)$ 存在周期为 2 的周期点；

③若 $f(x)=\begin{cases}2x, x<\dfrac{1}{2},\\ 2(1-x), x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 则 $f(x)$ 不存在周期为 3 的周期点；

④若 $f(x)=x(1-x)$，则对任意正整数 n，$\dfrac{1}{2}$ 都不是 $f(x)$ 的周期为 n 的周期点.

其中所有正确结论的序号是________.

11. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对任意 $x\in D$，存在 $y\in D$，使得 $\dfrac{f(x)-f(y)}{2}=C$（C 为常数）成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上的“半差值”为 C. 下列四个函数中，满足所在定义域上“半差值”为 2 的函数是________（填上所有满足条件的函数的序号）.

①$y=x^3-1$；②$y=e^x(x+1)$；③$y=\log_2 x$；④$y=\sin x$.

基础过关

1. 已知函数 $f(x)=e^x-a(x+2)$.

(1)当 $a=1$ 时,讨论 $f(x)$的单调性;

(2)若 $f(x)$有两个零点,求 a 的取值范围.

2. [2024·朝阳二模] 已知函数 $f(x)=ax-\ln(1-x)(a\in\mathbf{R})$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程;

(2)若 $f(x)\geqslant0$ 恒成立,求 a 的值;

(3)若 $f(x)$有两个不同的零点 x_1,x_2,且$|x_2-x_1|>e-1$,求 a 的取值范围.

能力提升

3. 已知函数 $f(x)=\ln x+\sin x$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

(2)求函数 $f(x)$在区间$[1,e]$上的最小值；

(3)证明：函数 $f(x)$只有一个零点.

4. 已知函数 $f(x)=x(\ln x+1)$.

(1)求 $f(x)$的最小值.

(2)已知点 $P(x_0,f(x_0))$在曲线 $y=f(x)$上.

(i)求曲线 $y=f(x)$在点 P 处的切线方程(用 x_0 表示)；

(ii)设点 $A(a,b)$，$0<b<f(a)$，当 $x\in(e^{-2},+\infty)$时，证明：过点 A 至少有一条直线与曲线 $y=f(x)$相切.

基础过关

1. [2024·东城二模] 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x-2x$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

(2)求 $f(x)$在区间$[-1,1]$上的最大值；

(3)设实数 a 使得 $f(x)+x>a\mathrm{e}^x$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,写出 a 的最大整数值,并说明理由.

2. [2023·通州一模] 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$,$g(x)=\ln(x+a)(a\in\mathbf{R})$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程.

(2)设 $\varphi(x)=f(x)g(x)$,请判断 $\varphi(x)$是否存在极值.若存在,求出极值;若不存在,说明理由.

(3)当 $a=0$ 时,若对任意 $s>t>0$,不等式 $g(s)-g(t)>k\left[\dfrac{1}{f(s)}-\dfrac{1}{f(t)}\right]$恒成立,求 k 的取值范围.

能力提升

3. [2022·朝阳二模] 已知函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$.

(1)当 $x\in(0,\pi)$时,求函数 $f(x)$的单调区间;

(2)设函数 $g(x)=-x^2+2ax$,若对任意 $x_1\in[-\pi,\pi]$,存在 $x_2\in[0,1]$,使得$\frac{1}{2\pi}f(x_1)\leqslant g(x_2)$成立,求实数 a 的取值范围.

4. [2024·海淀二模] 已知函数 $f(x)=\ln(x-a)+2\sqrt{3a-x}\,(a>0)$.

(1)若 $a=1$.

①求曲线 $y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线方程;

②求证:函数 $f(x)$恰有一个零点.

(2)若 $f(x)\leqslant\ln a+2a$ 对 $x\in(a,3a)$恒成立,求 a 的取值范围.

基础过关

1. ［2023·密云二模］已知函数 $f(x)=x\ln(x+1)$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

(2)证明：$f(x)+\dfrac{1}{2}x^3\geqslant x^2$.

2. 已知函数 $f(x)=x\ln x+ax+1(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(2)当 $x>1$ 时，证明：$e^x\ln x>e(x-1)$.

能力提升

3. [2023·丰台一模] 已知函数 $f(x)=x+\frac{a}{e^x}(a>0)$.

(1)求函数 $f(x)$的极值.

(2)若函数 $f(x)$有两个不相等的零点 x_1,x_2.

(i)求 a 的取值范围;

(ii)证明:$x_1+x_2>2\ln a$.

4. 已知函数 $f(x)=e^x\ln(1+x)$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程;

(2)设 $g(x)=f'(x)$,讨论函数 $g(x)$在$[0,+\infty)$上的单调性;

(3)证明:对任意的 $s,t\in(0,+\infty)$,都有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$.

基础过关

1. ［2024·东城二模］已知函数 $f(x)=x\sin 2x+\cos 2x$.

(1)求 $f(x)$的图象在点$\left(-\frac{\pi}{4},f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$处的切线方程；

(2)求函数 $f(x)$在区间$\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$上的极值点的个数.

能力提升

2. [2021·海淀二模] 已知函数 $f(x)=x-a\ln x$.

(1)求 $f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程;

(2)求 $f(x)$的单调区间;

(3)若关于 x 的方程 $x-a\ln x=0$ 有两个不相等的实数根,记较小的实数根为 x_0,求证:$(a-1)x_0>a$.